**Лекция 11.**

*Условия потенциальности силового поля*

Рассмотрим движение точки M (массы *m*) в E3 относительно репера в поле сил ), где , , – открытое связное множество в R3.

Если существует функция : , то поле сил – *потенциальное в D, а – силовая функция (силовой потенциал или потенциал поля* )*).* Если , то , что равносильно . Так же можно получить следующую формулу: .

, отсюда, необходимым и достаточным условием потенциальности силового поля является равенство .

Если *A* - работа по перемещению материальной точки в потенциальном поле силы из точки M0 в точку M вдоль дуги (M0,M), то получаем: – работа *A* зависит только от конечных точек дуги траектории и не зависит от выбора дуги, соединяющей эти точки. Множество точек , удовлетворяющее равенству – *эквипотенциальная поверхность.* Работа при перемещении точки из произвольной точки одной эквипотенциальной поверхности в произвольную точку другой эквипотенциальной поверхности равно разности .

Если поле имеет потенциал *U*, то, учитывая и , получаем: , где - *постоянная механической энергии*, а – *интеграл механической энергии.* *Потенциальная энергия* материальной точки *.*

**Примеры:**

* *Поле силы тяжести*

Сила (действует на материальную точку *M* массы *m*), направлены так, что . Получаем: . Так как потенциальна, можно предположить: . Тогда интеграл энергии равен .

* *Центральное поле сил*

*.* В силу , получаем: , т.е. центральное поле сил является потенциальным и , а интеграл энергии равен .

* Сила сопротивления среды

(*-* коэффициент сопротивления среды). По теореме об изменении кинетической энергии получаем: - сила сопротивления среды вызывает рассеяние кинетической энергии движущейся материальной точки, — это пример *диссипативных* сил. В отличие от них, потенциальные силы являются примером *консервативных* сил.

*Кинетическая энергия системы, теорема Кенига.*

Рассмотрим движение механической системы из конечного числа точек (имеющих массы в E3 относительно репера .- перемещение точки j, – скорость точки j, . – положение центра масс системы, – скорость центра масс системы и .

– *кинетическая энергия системы*. В репере , кинетическая энергия системы равна.

**Теорема Кенига:** .

*Теорема об изменении кинетической энергии системы*

\*обозначения из предыдущих пунктов

Главный вектор внешних сил - , главный вектор внутренних сил - . При t>t0: Mj,0=Mj(t0), Mj=Mj(t). Дуга между Mj,0 и Mj – (Mj,0,Mj).

По дифференциальным уравнениям Ньютона: . Далее суммируя по j, получаем: , , - теорема об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

,

,

,

*- теорема об изменении кинетической энергии механической системы в конечной (интегральной) форме*,

– *мощность* (характеризует интенсивность выполнения работы *A+A’* внутренними и внешними силами, действующими на точки механической системы).

Величина *δA (δ’A)* - сумме элементарных работ главных векторов внешних (внутренних) сил, приложенных к точкам механической системы. Используя мощьность и , получаем что производная кинетической энергии механической системы равна мощности работы, выполняемой главными векторами внешних и внутренних сил, действующих на все точки этой системы.

Если существует функция *V*: , то по вышеописанным формулам получаем: . - *интеграл механической энергии*, - *постоянная механической энергии*. – *потенциальная энергия механической системы*.

*Движение точки в центральном поле сил*

\*обозначения из предыдущих пунктов

Движение точки *M* удовлетворяет уравнению Ньютона: .

В предыдущем эссе описаны интеграл площадей и плоскость Лапласа. Центральное поле сил является потенциальным, причем: , . . Эти выводы позволяют найти решение уравнения Ньютона и описать траектории точки в рассматриваемом случае ее движения в центральном поле сил.

Репер можно выбрать так, чтобы: . Отсюда плоскость Лапласа ортогональна и множество точек этой плоскости можно описать формулой *z = 0*.

Рассмотрим движение точки *M* в плоскости Лапласа в цилиндрических координатах: , . Далее: , где . Используя формулу , получаем: , где – *интеграл площадей*, а равна величине , взятой со знаком, зависящим от .

Проекция ускорения точки на полярного радиуса равна Проектируем уравнение Ньютона на это направление: , . Далее, используя равенство , получаем: .

Рассмотрим движение материально точки в центральном поле силы Ньютона: , . Если , то - движение рассматриваемой материальной точки является прямолинейным. Если , то из получаем . Далее, используя , получаем: , . Подставив и в выражение для , получим:  
 .   
Находим формулу для решения этого уравнения: , где – произвольные постоянные. Получаем , где , , . Это уравнение задаёт *коническое сечение*. Начало координат O – фокус этого сечения, параметр и эксцентриситет , – *истинная аномалия -* угловое удаление материальной точки от ближайшей к притягивающему центру точки P траектории (орбиты), которую называют *перицентром орбиты*. Наиболее удаленную от притягивающего центра точку A орбиты (если такая точка существует) называют *апоцентром орбиты*.

описывает три типа конических сечений при 0 ≤ e <1, e = 1 и e> 1. Данная классификация орбит (по величине эксцентриситетов) неудобна на практике. Лучше использовать классификацию по постоянной энергии: ибо она легко вычисляется по начальным данным.

**Теорема:** Условия e<1, e=1, e>1 эквивалентны условиям h<0, h=0, h>0 соответственно.